



تعیین ضریب شدت تنش در ترک لبه‌ای غیرمرکزی در ورق نیمه محدود با بار متمرکز

فرزاد فریبا – استادیار، گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان

مهران زحلی – دانشجوی کارشناسی ارشد گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان

E-mail: Farzad.Fariba@gmail.com

چکیده: تعیین توزیع تنش در نوک ترک و تعیین ضریب شدت تنش در آن، یکی از مباحث مطرحه و مهم در مکانیک شکست می باشد. مقدار ضریب شدت تنش برای حالت های مختلف بار گذاری و هندسه های مختلف نمونه و ترک در استاندارد ها ارائه شده است. اما در تمامی این حالت ها ترک در وسط ورق واقع شده است. هنگامی که توزیع تنش یکنواخت در لبه های ورق وجود دارد، موقعیت ترک چندان تاثیری در مقدار ضریب شدت تنش نخواهد داشت، اما در بار گذاری های متمرکز با دور شدن از محل اعمال بار توزیع تنش تغییر نموده و مقدار ضریب شدت تنش نیز تغییر می کند. در این مقاله، رابطه ای برای تعیین ضریب شدت تنش در ترک لبه ای در ورق نیم محدود با بارگذاری متمرکز در لبه ورق، بر حسب فاصله از لبه بار گذاری ارائه شده است. این رابطه با استفاده از شبیه سازی از طریق نرم افزار آباکوس به دست آمده و سپس با استفاده از روابط تحلیلی موجود، و با تعیین توزیع تنش در ورق مورد بررسی و استفاده از روابط موجود در نظریه شکست خطی و در محدوده الاستیک نیز تعیین و مقایسه شده است. این دو رابطه با هم مقایسه شده و در نهایت یک رابطه برای این منظور ارائه شده است.

واژه های کلیدی: توزیع تنش، ضریب شدت تنش، بار گذاری متمرکز، ورق نیمه محدود، ترک لبه ای.

Determination of Stress Intensity Factor in Un-Central Edge Cracks of a Semi-infinite Plate with a Local Load

F. Fariba, Ass. Prof., Dept. of Applied Design, the Faculty of Mech. Eng., IAU, Branch of Takestan

M. Zohali, MSc. Student, Dept. of Applied Design, the Faculty of Mech. Eng., IAU, Branch of Hamedan

Abstract: The stress distribution on the tip of the cracks and the stress intensity factor on them are the main course in the fracture mechanic. The stress intensity factor of the cracks with the different load exited and the different geometry are listed in the tables of the standard books. In all of them, the cracks are located in the cenrall point of the plates. In the uniform edge loaded case, the crack position is not effect on the stress intensity factor of the crack but in the case that the load is concentrated the stress distribution different from point to another point and therefore the stress intensity factor of the crack, is changed with the crack displacement from the point of the exited load. In this paper, the stress intensity factor changes with the distance of it from the edge of the semi infinite plate with the edge crack is investigated. A new relation is introduced from the simulation solution with the Abaqus. Then, similar relation from analytical solution from the theory of the linear fracture mechanic was proposed. This relation was determined from the stress distribution calculation in the plate with the pointed load with the analytical solution from the elasticity thory. This two relations were compared with another and finally the more accurated relation was introduced as the relation of the stress intensity factor with the distance from the edge of the plate.

Keywords: Torsion test, Work hardening, Nadai procedure, Ludwig formula, and Materials constants.

۱- مقدمه

توزیع تنش و تمرکز تنش در نوک ترک در مکانیک شکست خطی یکی از مسائل مهم و اساسی می باشد. تعیین توزیع تنش در نوک ترک، وابسته به محاسبه و تعیین پارامتری به نام ضریب شدت تنش می باشد. این پارامتر نه تنها می تواند تعیین کننده مقدار تنش در نوک ترک و در نقاط پیرامون آن باشد، بلکه نشان دهنده وضعیت ماده در برابر ترک مورد بررسی نیز خواهد بود. این پارامتر یکی از پارامترهای مهم در مبحث نظریه مکانیک شکست خطی می باشد. ضریب شدت تنش برای بار گذاری ها و هندسه های مختلف در استانداردهای موجود ارائه شده است. در این استاندارد ها معمولاً ترک ها در مرکز ورق در نظر گرفته می شوند. این امر برای بار گذاری های گسترده یکنواخت در لبه ورق سبب ایجاد اختلاف و تغییر در ضریب شدت تنش نمی گردد، اما در هنگامی که بار از نوع متمرکز باشد به دلیل ایجاد توزیع تنش غیر یکنواخت در ورق، محل ترک در مقدار ضریب شدت تنش موثر خواهد بود. در این مقاله، تغییرات ضریب شدت تنش با نزدیک شدن ترک به لبه بار گذاری شده با استفاده از روش تحلیلی و شبیه سازی تعیین شده و نتایج با هم مقایسه شده است. در نهایت یک رابطه برای این پارامتر بر حسب فاصله از لبه ورق ارائه شده است.

اولین پژوهش ها و آزمایش های گزارش شده در قرن های پیشین توسط لئوناردو گزارش شده است که در آن به علل شکست های اتفاق افتاده پرداخته است. او استحکام یک سیم آهنی را اندازه گیری نمود و نتیجه گرفت که استحکام سیم آهنی با طول آن نسبت مستقیم دارد. این نتایج نشان می دهد که ترک و رخنه در ماده مورد بررسی استحکام آن را کنترل می کند. نتایج نشان داد که در سیم آهنی بلند تر با حجم بزرگتر امکان وجود رخنه بیشتر بوده و استحکام کاهش می یابد [۱۳]. ارتباط بین تنش شکست نمونه و طول ترک اولین بار در سال ۱۹۲۰ توسط گریفیث [۱] مطرح و ارائه شد. او بر روی یک سوراخ بیضوی به عنوان یک ترک بیضوی که در حال رشد ناپایدار بود، تحلیل تنش انجام داد. البته این کار توسط اینگلس [۲] هفت سال زودتر انجام شده بود. گریفیث اولین شخصی بود که معیار و تئوری مربوط به رشد ترک را بر اساس معیار پایستاری انرژی فرموله نموده و ارائه داد [۱]. بر اساس این معیار، ترک در صورتی رشد می کند که انرژی کرنشی حاصل از رشد ترک که آزاد می شود برابر بوده و یا بیشتر از انرژی سطحی ماده باشد. انرژی ای که سطوح ماده را به همدیگر چسبیده و پیوسته نگاه می دارد. تئوری گریفیث، به درستی رابطه بین استحکام در نمونه شیشه ای و طول ترک را پیشگویی نمود. این تئوری برای نمونه های فولادی به درستی جواب نداد و در حقیقت تنها برای مواد ترد ایده آل مصداق داشته است. تئوری اصلاح شده گریفیث در سال ۱۹۴۸ برای همه مواد ارائه شد.

یکی از مهمترین اتفاقات مربوط به شکست خستگی مربوط به کشتی آمریکایی به نام کشتی لایبرتی بود. این کشتی به دلیل خستگی حاصل از حرکت موج ها در دریچه موجود بر روی عرشه دچار شکست شد. با اتفاق کشتی لایبرتی، عصر جدیدی در موضوع مکانیک شکست شروع شد. در این هنگام این تحقیقات در آزمایشگاهی به نام ناول توسط ایروین [۳] شروع شد. او در اولین اقدام تئوری های گریفیث را با تعریف و در نظر گرفتن ناحیه پلاستیک به وجود آمده در نوک ترک در خصوص معیار انرژی برای رشد ترک برای فلزات نیز گسترش داد. اروان سپس در اقدامی جداگانه معیار های گریفیث را اصلاح نموده و ارائه داد [۴]. موت در بررسی های خود معیار گریفیث را در رشد ناگهانی ترک تعمیم داد [۵]. در سال ۱۹۵۶ ایروین با توجه معیار انرژی گریفیث، معیار رشد ترک را به صورت نرخ آزاد سازی انرژی به صورت جدیدی ارائه نمود که توسط مهندسان قابل استفاده تر باشد [۶]. پس از آن وسترگارد [۷] در سال ۱۹۳۸ با معرفی توابع مختلط روش و تکنیکی را برای تعیین توزیع تنش و جابه جایی در نوک ترک معرفی نموده و نتایج بررسی خود را در مقاله

ای چاپ نمود. پس از آن ابروین نشان داد که توزیع تنش به دست آمده در نوک ترک توسط وسترگارد را می توان بر حسب پارامتری بیان نمود که به آن ضریب شدت تنش نام نهادند [۸]. ویلیامز با استفاده از تکنیک دیگری توزیع تنش در نوک ترک را به دست آورد [۹]. پس از آن بررسی های مکانیک شکست ادامه یافته است.

برخی کاربرد های تئوری و معیار های ارائه شده در کار های عملی بعد از آن با موفقیت روبرو شد. ولز [۱۰] در سال ۱۹۵۶ با استفاده از معیار های گریفیث علت شکست در بال های جت های هوانورد را به درستی تحلیل نموده و علت آن ها را در رشد ترک به دلیل تبعیت از معیار های ارائه شده دانست. شرکت جنرال موتور در تحقیقات انجام گرفته توسط وین و وانت [۱۱] علت شکست شفت توربین گازی را به درستی تحلیل و بررسی نمود. در سال ۱۹۶۰ پاریس [۱۲] رابطه معروف خود را برای رشد ترک ارائه داد. مکانیک شکست غیر خطی هنگامی مطرح شد که مسئله پلاستیسیته نوک ترک مطرح شد. از آن به بعد تحلیل مکانیک شکست بیشتر بر روی مسئله پلاستیسیته نوک ترک و مباحث مربوطه معطوف شد که البته با توجه به این که تحقیق حاضر تنها در محدوده الاستیک انجام شده است لازم به ذکر نیست.

۲- روابط حاکم بر مسئله

گریفیث [۱] در حین عملیات جبری ضریب شدت تنش را به صورت رابطه زیر برای مود ۱ و برای ترک مرکزی مطابق با شکل ۱ تعریف نمود [۱۳]:

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1)$$

وی همچنین ضریب شدت تنش را برای مود های مختلف بار گذاری تعریف نموده است. برای تعیین توزیع تنش در نوک ترک، وسترگارد [۷] توابع مختلطی را معرفی نموده و با استفاده از روش های موجود در الاستیسیته و معرفی توابع تنش ایری توزیع تنش را با استفاده از توابع مختلط استخراج نموده است [۱۳ و ۱۴]. برای بار گذاری در مود ۱، توزیع تنش در نوک ترک به صورت روابط زیر ارائه شده است [۱۶]:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4)$$

همچنین، در صورتی که ابعاد ورق نسبت به طول ترک خیلی بزرگ نباشد ضریبی به نام ضریب تصحیح برای آن به کار برده می شود که اثر اندازه را نیز در نظر می گیرد. برای ترک لبه ای که در دو لبه آن نیروی متمرکز وجود داشته باشد، مطابق با شکل ۲ مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه زیر به دست می آید [۱۳]:

(۵)

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad \text{که در آن داریم:}$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{2 + \frac{a}{W}}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.60 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (6)$$

که در آن W و B به ترتیب پهنا و ضخامت ورق می باشند.

برای تعیین ضریب شدت تنش در حالت بارگذاری غیر یکنواخت بر روی خط ترک، یک روش تحلیلی وجود دارد. برای آن باید از رابطه ضریب شدت تنش، مطابق با شکل ۳ برای ترک لبه ای تحت بار متمرکز P در فاصله x از نوک ترک به طول a به صورت رابطه زیر استفاده نمود [۱۵]:

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + F\left(\frac{x}{a}\right)}{(a^2 - x^2)^{1/2}} P a^{1/2} \quad (7)$$

که در آن:

$$F\left(\frac{x}{a}\right) = [1 - (x/a)^2] \left[0.2945 - 0.3912 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 0.7685 \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 0.9942 \left(\frac{x}{a}\right)^6 + 0.5094 \left(\frac{x}{a}\right)^8 \right] \quad (8)$$

حال چنان که بار گزاری و توزیع تنش بر روی ترک دارای تابع σ_y باشد، مطابق با شکل ۴ رابطه (۷) برای آن به صورت زیر نوشته می شود:

$$dK_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + F\left(\frac{x}{a}\right)}{(a^2 - x^2)^{1/2}} (\sigma_y dx) a^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

در واقع در این رابطه به جای نیروی متمرکز مقدار $\sigma_y dx$ قرار داده شده است. از آن جا که توزیع تنش بر روی لبه شامل تعداد زیادی نیروی متمرکزی می باشد، از مفهوم انتگرال برای آن استفاده می شود. خواهیم داشت:

$$K_I = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + F\left(\frac{x}{a}\right)}{(a^2 - x^2)^{1/2}} (\sigma_y dx) a^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

با قرار دادن رابطه توزیع تنش در ورق نیمه محدود در نزدیکی لبه ورق که در فصل بعدی به دست خواهد آمد و انتگرال گیری از رابطه مقدار تئوری ضریب شدت تنش به دست خواهد آمد. توجه شود که این حالت هنگامی روی می دهد که ترک نزدیک لبه باشد و اثر عدم یکنواختی تنش بر روی آن وجود خواهد داشت. همچنین برای تعیین انتگرال در حالت پیچیده می توان از انتگرال گیری عددی استفاده نمود چرا که انتگرال گیری دارای کران پایین و بالا می باشد.

برای بررسی صحت رابطه بیان شده در حالت توزیع یکنواخت

تنش که در آن بار گسترده یکنواخت با شدت σ_0 بر لبه ورق اثر می کند، از رابطه (۱۰) استفاده و ضریب شدت تنش به دست آمده است. در این حالت داریم:

$$K_I = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1+F(\frac{x}{a})}{(a^2-x^2)^{1/2}} (\sigma_0 dx) a^{\frac{1}{2}} = \tag{11}$$

$$= \sigma_0 a^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \frac{1+F(\frac{x}{a})}{(a^2-x^2)^{1/2}} dx$$

با جاگذاری از معادله (۸) و مرتب سازی و محاسبه عددی ترم های موجود در انتگرال به روش دوزنقه و با در نظر گرفتن ۱۰۰ المان، در نهایت به دست می آید:

$$K_I = 1.87885 \frac{2\sqrt{a}\sigma_0}{\sqrt{\pi}} = 1.19\sqrt{\pi a}\sigma_0 \tag{12}$$

مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه (۵) و (۶) به صورت زیر به دست می آید:

$$K_I = 1.145\sigma_0\sqrt{\pi a} \tag{13}$$

دیده می شود که این دو مقدار با هم خطایی در حدود ۲/۳ درصد دارد. بنابراین با این محاسبات نتیجه گرفته می شود که این رابطه و روش معتبر است. در ادامه از این روش برای تعیین ضریب شدت تنش برای ترک های واقع در نقاط مختلف نسبت به لبه بار گذاری شده استفاده می شود. قبل از آن باید بتوان توزع تنش را در ورق مورد بررسی تعیین نمود.

۳- توزیع تنش در ورق مورد بررسی

برای حل این مسئله از حل الاستیک مسئله گوه استفاده شده است. برای این منظور در ابتدا با توجه با پارامتر های شکل ۵، برای حالت مسئله مورد بررسی در این تحقیق داریم [۱۵]:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad F_1 = 0 \tag{14}$$

حل عمومی گوه در مراجع به صورت زیر ارائه شده است [۱۵]:

$$\sigma_{rr} = \frac{2C_1 \cos \theta}{r} + \frac{2C_3 \sin \theta}{r} \quad , \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \tag{15}$$

که در آن σ_{rr} ، $\sigma_{r\theta}$ و $\sigma_{\theta\theta}$ به ترتیب تنش در راستای شعاعی، برشی و محیطی می باشند. همچنین C_1 ، C_3 ثوابتی هستند که از روابط زیر به دست می آیند:

$$F_1 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (C_1 \cos \theta + C_3 \sin \theta) \cos \theta d\theta = 0 \tag{16}$$

$$F_2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (C_1 \cos \theta + C_3 \sin \theta) \sin \theta d\theta = 0 \tag{17}$$

اکنون باید این مسئله، برای ورق مورد بررسی حل شود. با قرار دادن شرایط مسئله در روابط (۱۶) و (۱۷) مقدار دو ثابت موجود در رابطه استخراج می شوند:

$$\frac{4F_2}{\pi^2-4} = C_1 \tag{18}$$

$$\frac{2\pi F_2}{4-\pi^2} = C_3 \tag{19}$$

با قرار دادن این ثابت ها در معادله تنش به دست می آوریم:

$$\sigma_{rr} = \frac{8F_2 \cos \theta}{r(\pi^2 - 4)} + \frac{4\pi F_2 S \sin \theta}{r(4 - \pi^2)} \quad (20)$$

با توجه به روابط تبدیل بین مختصات دکارتی و قطبی، هم چنین رابطه بین تنش در مختصات قطبی و مختصات دکارتی به دست می آید:

$$\sigma_x = \frac{8F_2 x^2}{(x^2 + y^2)^2 (\pi^2 - 4)} \left(x - \frac{y}{2}\right) \quad (21)$$

$$\sigma_y = \frac{8F_2 y^2}{(x^2 + y^2)^2 (\pi^2 - 4)} \left(x - \frac{y}{2}\right) \quad (22)$$

که در آن σ_x و σ_y به ترتیب تنش در راستاهای طولی و عرضی در ورق می باشند. همچنین، علامت منفی به دلیل این است که نیروی مسئله ما کششی است اما نیروی موجود در این معادلات فشاری می باشد.

با رسم نمودن توزیع تنش طولی در ورق در فاصله های مختلف از لبه بارگذاری شده نمودار شکل ۶ به دست می آید.

۴- ضریب شدت تنش در مسئله مورد بررسی

چنان که بیان گردید برای تعیین مقدار ضریب شدت تنش در ورق مورد بررسی در این تحقیق، از رابطه انتگرالی ۹ و قرار دادن توزیع تنش در رابطه می توان استفاده نمود. مشخصات ورق مورد بررسی در این تحقیق همراه با یک ترک مورد نظر، در شکل (۷) نشان داده شده است. برای استفاده از رابطه ۹ باید با توجه به رابطه تنش به دست آمده در رابطه ۲۲ مقدار تنش را در رابطه (۹) جایگزین نموده و مقدار ضریب شدت تنش را محاسبه نمود. خواهیم داشت:

$$(23)$$

با ساده نمودن این رابطه در نهایت به دست می آید:

$$K_I = \frac{-16P\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}(\pi^2 - 4)} \int_0^a \frac{1 + F\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 \left(x - \frac{\pi y}{2}\right) dx \quad (24)$$

که در آن داریم:

$$F\left(\frac{x}{a}\right) = [1 - (x/a)^2] \left[0.2945 - 0.3912 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 0.7685 \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 0.9942 \left(\frac{x}{a}\right)^6 + 0.5094 \left(\frac{x}{a}\right)^8\right] \quad (25)$$

در شکل (۷) انتگرال معادله (۲۳) و تغییرات آن در طول ترک به همراه توزیع تنش بر روی آن برای ترک را نشان داده شده است.

برای محاسبه این انتگرال طول ترک را به تعداد ۱۰۰ فاصله مساوی تقسیم نموده و مساحت هر قسمت را از روش مستطیل یا دوزنقه محاسبه نموده و نتایج را به هم جمع می نماییم. با این محاسبات برای ترک واقع در مرکز ورق $y=100$ به دست می آید:

$$(26)$$

$$K_I = 7.56 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

از رابطه تحلیلی به دست می آید:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right) = 6.748 \quad (27)$$

دیده می شود که این تکنیک در محاسبه ضریب شدت تنش برای ترک کناری واقع در مرکز ورق دارای خطایی در حدود ۱۲ درصد می باشد. علت بالا بودن نسبی خطا این است که رابطه توزیع تنش استخراج شده چندان دقیق نیست. اما چنان که بعداً خواهیم دید شبیه سازی نتایج دقیق تری را ارائه می دهد.

بعد از این که یک صحت سنجی نسبی از روش پیشنهادی و روابط استخراجی در بخش قبلی به عمل آمد، در این مرحله از این روش برای تعیین ضریب شدت تنش در فاصله های دیگر برای ورق مورد بررسی با طول ترک ۱۰ میلیمتر و نیروی اعمالی برابر با مقدار ۲۰۰۰ نیوتن، استفاده و تغییرات آن مورد بررسی قرار داده شده است. مقدار ضریب شدت تنش تعیین شده در جدول ۱ لیست شده است. تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله را چنان که در شکل نمودار ۸ نشان داده شده است، می توان به صورت رابطه زیر

$$K_I = \int_0^a \frac{2\sqrt{a} \cdot 1 + F\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\pi(a^2 - x^2)}} \frac{-8F_2 y^2}{(x^2 + y^2)^2 (\pi^2 - 4)} \left(x - \frac{\pi y}{2}\right) dx \quad (28)$$

$$K_i = 165.38e^{-0.461y}$$

این مقدار برای ترک به طول ۱۰ میلیمتر و نیروی ۲۰۰۰ نیوتن به دست آمده است. می دانیم که ضریب شدت تنش وابسته به طول ترک و مقدار نیرو می باشد. بنابراین رابطه را به صورت بی بعد شده زیر در می آوریم:

$$K_i = 0.033P\sqrt{ae}^{-0.71y} \quad (29)$$

اکنون با استفاده از تکنیک و رابطه معرفی شده، و با برنامه نویسی شرح داده شده محاسبات مشابه برای طول ترک ها و نیرو های مختلف مقدار ضریب شدت تنش را انجام و نتایج و مقدار خطای موجود با رابطه پیشنهادی مقایسه شده است. این مقایسه نشان دهنده صحت و جامعیت رابطه پیشنهادی را اثبات می نماید. نتایج این محاسبات در جدول ۲ ارائه شده است.

۵- شبیه سازی اجزای محدود

برای شبیه سازی ترک و تعیین ضریب شدت تنش از نرم افزار آباکوس استفاده شده است. این نرم افزار امکانات ویژه ای برای تحلیل تنش دارا می باشد. در این شبیه سازی مراحل زیر انجام شده است: با در نظر گرفتن ترک در مرکز ورق و تعیین ضریب شدت تنش روش شبیه سازی از نظر تعداد المان ها و روش به کار گرفته شده صحت سنجی شده است. با در نظر گرفتن نمونه مورد بررسی به صورتی که در شکل نشان داده شده است و ترکی به طول ۱۰ میلیمتر و نیروی اعمالی برابر با مقدار ۲۰۰۰ نیوتن ضریب شدت تنش برای ترک مرکزی برابر با مقدار ۶/۰۴۹ به دست آمده است. با مقایسه این مقدار با مقدار حاصل از رابطه تحلیلی مقدار خطایی در حدود ۱۰ درصد را نشان می دهد. این مقدار خطا نشان دهنده درستی نتایج شبیه سازی می باشد.

در مرحله دوم با تغییر مکان ترک و نزدیک نمودن آن به لبه بار گذاری شده برای هر طول ترک و نیروی اعمالی مورد نظر مقدار ضریب شدت تنش به دست آمده است. با رسم تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله از لبه بار گذاری شده در نهایت یک رابطه پیشنهاد شده است. در شکل ۱۰ روش ایجاد ترک در فاصله ۵ میلیمتری لبه نشان داده شده است. در این شبیه سازی ها تعداد ۲۴۰۰ المان

با کد C3D8R^۱ استفاده شده است. برای ترک به طول ۱۰ میلیمتر ۱۰ گره بر روی خط ترک ایجاد شده و برای طول ترک ۲۰ میلیمتر تعداد ۲۰ المان. در حقیقت تعداد المان ها بر روی خط ترک به صورتی انتخاب شده است که طول هر المان برابر با مقدار ۱ میلیمتر باشد. برای تعریف ترک از روش بردار q استفاده شده است.

برای طول ترک ۱۰ میلیمتر و نیروی ۲۰۰۰ نیوتن مقادیر به دست آمده از شبیه سازی در جدول ۳ لیست شده است. در مرحله بعدی بعد از انجام تعدادی شبیه سازی برای طول ترک های مختلف و نیروی های متعدد دیده شد که مقدار ضریب شدت تنش با مجدور طول ترک و نیروی اعمالی نسبت دارد. این نسبت را در روابط تحلیلی ضریب شدت تنش هم می توان دید. بنابراین مقادیر به دست آمده بر مجدور طول ترک ضرب در نیرو تقسیم شده و در نهایت رابطه بی بعد زیر برای تمامی شبیه سازی ها به دست آمد:

$$K_i = 0.043P\sqrt{ae}^{-0.86y} \quad (30)$$

در حقیقت هدف این است که بتوان تغییرات تمامی حالات مخالف را توسط یک رابطه واحد نشان داد. برای نشان دادن درستی رابطه پیشنهادی برای حالت های مختلف و در طول ترک ها و فاصله ترک از لبه بار گذاری های متفاوت نتیجه حاصل از شبیه سازی به همراه نتیجه حاصل از رابطه پیشنهادی به دست آمده و در جدول ۴ نشان داده شده است. دیده می شود ماکزیمم خطای موجود مقدار ۱۵/۰۶٪ می باشد که مقداری قابل قبول است و نشان می دهد رابطه پیشنهادی که از روش شبیه سازی و با در نظر گرفتن نیرو و طول ترک مشخصی استخراج شده است با خطای ماکزیمم ۱۶ درصد می تواند رفتار ماده را در محدوده الاستیک در تعیین ضریب شدت تنش به درستی و با دقت قابل قبول ارائه دهد. در شکل ۱۲ تغییرات ضریب شدت تنش در حالت های مختلف نشان داده شده است.

۶- نتیجه گیری و بحث:

چنان که هدف این تحقیق بود، تغییرات مقدار ضریب شدت تنش با نزدیک شدن ترک به لبه بار گذاری شده در حالت اعمال نیروی متمرکز در لبه ورق توسط دو روش تحلیلی و شبیه سازی به دست آورده شد. نتایج شبیه سازی و تحلیلی تقریباً به هم نزدیک می باشند البته با توجه به این که در هر دو روش سعی شده است نتایج با استفاده از یک تابع نمایی تقریب زده شود. در جدول ۵ ثابت های معادله به دست آمده از این دو روش به همراه هم نشان داده شده است. با رسم منحنی تغییرات ضریب شدت تنش حاصل از دو روش به صورتی که در شکل ۱۳ نمایش داده شده است بهتر می توان در خصوص تفاوت این دو روش و داده های حاصله قضاوت نمود. چنان که از داده های به دست آمده از نمودار شکل ۱۲ نیز دیده می شود، تفاوت حاصله بسیار اندک می باشد. می توان نتایج زیر را استخراج نمود:

- ضرایب به دست آمده از شبیه سازی برای نقاط دور از لبه بار گذاری شده مقادیر کمتری را نتیجه می دهند در صورتی که مقادیر به دست آمده از تحلیل برای نقاط دور از لبه مقادیری بیشتر را نشان می دهد.
- در نقاط بسیار نزدیک به لبه بار گذاری شده (۵ میلیمتر و نزدیک تر) شبیه سازی مقادیر بیشتری را نتیجه می دهد. این نتیجه گیری از نتایج به دست آمده از شبیه سازی نیز کاملاً مشهود است.

¹ An 8-node linear brick, reduced integration, hourglass control

- با توجه به این که شبیه سازی به درستی انجام شده است و روش شبیه سازی صحت سنجی شد و همچنین همگرایی مسئله مورد تایید قرار گرفته است، نتایج حاصل از شبیه سازی اعتبار بیشتری دارد.
- روش تحلیلی با توجه به تقریبی بودن تابع توزیع تنش، مقداری خطا دارد اما نزدیکی داده های حاصل از این روش نشان دهنده این است که اعداد و ارقام به دست آمده از شبیه سازی قابل استناد می باشد.

بنابراین می توان تابع زیر را برای تعیین ضریب شدت تنش در ترک های غیر مرکزی در ترک های لبه ای و کناری، برای این نوع مسائل با اطمینان ارائه داد:

$$K_i = 0.043P\sqrt{ae}^{-0.86y} \quad (31)$$

که در آن نیرو و طول ترک بر حسب میلیمتر قرار داده می شوند. چنان که برای حالت های مختلف بار گذاری و طول ترک، با استفاده از شبیه سازی و رابطه پیشنهادی مقادیر را تعیین نمایم جدولی مطابق با جدول ۶ به دست می آید. این جدول درصد خطای حاصل از رابطه پیشنهادی و شبیه سازی را ارائه می دهد. چنان که دیده می شود خطای موجود در بدترین حالت برابر با مقدار ۱۳ درصد می باشد. البته میان رابطه پوش داده شده و نتایج به دست آمده نیز مقداری خطا وجود دارد که با توجه به این که مایل هستیک تغییرات را با یک تابع نمایش دهیم این اتفاق افتاده است. بنابراین این رابطه با حداکثر خطایی در حدود ۱۳ درصد قابل ارائه می باشد.

۷- پیشنهادات:

موارد زیر در ادامه این تحقیق پیشنهاد می شود:

- تعیین تغییرات ضریب شدت تنش در ترک مرکزی با نزدیک شدن ترک به لبه بار گذاری شده
- بررسی تغییرات رشد ترک در ترک واقع شده در نزدیکی لبه بار گذاری شده در بار متمرکز و تعیین تغییرات آن

جدول ۱- تغییرات ضریب شدت تنش و مقدار تنش جدول ۲- ضریب شدت تنش به دست آمده از روش پیشنهادی
ماکزیمم بر حسب فاصله از لبه بار گذاری شده از رابطه تحلیلی و رابطه پوش داده شده پیشنهادی و مقدار خطای موجود

NO	P N	a mm	y mm	ki proposed formula	ki power function	ERR %
1	2000	10	100	7.75	7.93495	-2.3864
2	1000	10	50	7.27	6.49001	10.7289
3	500	10	50	3.84	3.245	15.4947
4	2000	20	100	13.01	11.2217	13.7455
5	2000	20	60	18.99	16.1277	15.0728
6	2000	20	20	28.24	35.1826	-24.584
7	2000	25	50	18.76	20.5232	-9.3988
8	2000	10	20	28.8	24.8778	13.6186
9	1000	5	10	16.76	14.388	14.153

y mm	ki Mpa(m ^{0.5})	Stress Mpa
100	7.56	42.8
90	8.4917	47.6
80	9.47	53.5
70	10.71	61.24
60	12.307	71.44
50	14.43	85.74
40	17.37	107.17
30	21.61	142.9
20	27.64	214.3
10	33.184	428.7
5	54.6	857.4

جدول ۳- تغییرات ضریب شدت تنش در فواصل مختلف

ترک از لبه بار گذاری شده حاصل از شبیه سازی

y mm	KI Mpa(m ^{0.5})	max stress on crack	y mm	KI Mpa(m ^{0.5})	max stress on crack
50	8.54234667	92	100	6.04964	66
45	9.94167333	96	95	5.81486667	78
40	11.341	100	90	6.1675	70
35	11.4935333	130	85	0	74
30	12.9280333	145	80	6.133	75
25	15.2843333	155	75	6.665655	75
20	20.4035667	210	70	6.6225	75
15	23.8548	270	65	7.11179	79
10	36.9614667	350	60	7.60108	83
5	65.0410667	1000	55	8.07171333	87.5

جدول ۴- مقادیر ضریب شدت تنش حاصل از شبیه سازی و رابطه

پیشنهادی و مقدار درصد خطای نسبی هر حالت

جدول ۵- تغییرات ضریب شدت تنش در فواصل

مختلف ترک از لبه بار گذاری شده

روش	A	B
شبیه سازی	0.043	-0.85
تحلیلی	0.033	-0.71

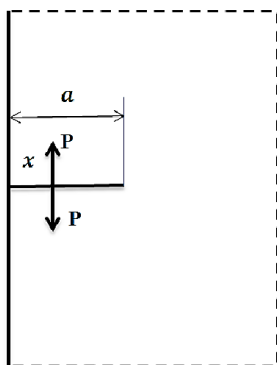
$$K_I = A \cdot y^B$$

جدول ۶- ضریب شدت تنش حاصل از رابطه

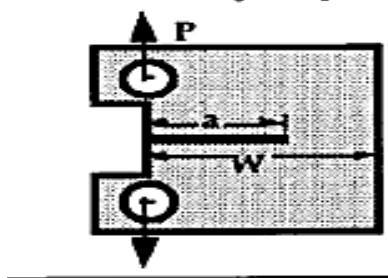
پیشنهادی و شبیه سازی و درصد خطای موجود

	a mm	P N	y mm	KI ABAQUS	KI POWER	%ERR
1	10	2000	100	6.050	5.447	9.960
2	10	2000	50	8.742	9.813	12.248
3	10	2000	5	65.041	69.336	6.603
4	10	3000	50	15.667	14.719	6.049
5	10	1000	5	40.126	34.668	13.603
6	10	500	30	3.668	3.785	3.203
7	15	2000	50	10.895	12.018	10.308
8	15	1000	30	8.358	9.272	10.940
9	5	2000	5	56.216	49.028	12.787

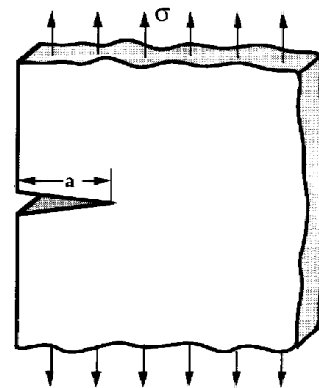
	a mm	P N	Y mm	KI ABAQUS	KI POWER	%ER
	10	2000	100	6.04	5.44	9.96
	10	2000	50	8.54	9.81	14.87
	10	2000	5	65.04	69.33	6.60
	10	3000	50	15.66	14.71	6.05
	10	1000	5	42.12	34.66	17.70
	10	500	30	3.66	3.78	3.20
	15	2000	50	10.44	12.01	15.06
	15	1000	30	8.05	9.27	15.06
	5	2000	5	56.21	49.02	12.78



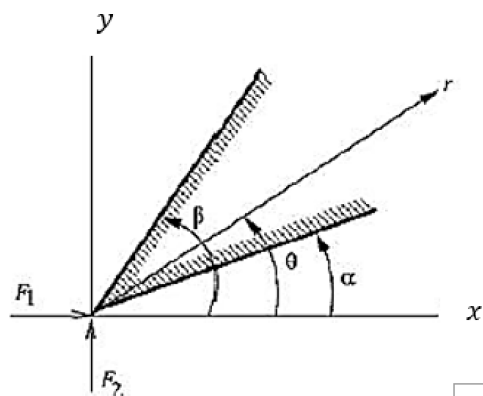
شکل ۳- ترک لبه ای دارای بار متمرکز در ورق نامحدود



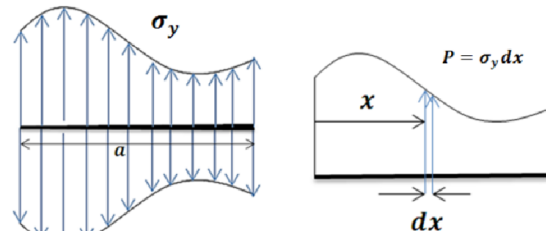
شکل ۲- ترک لبه ای با بار گذاری متمرکز بر لبه آن [۳]



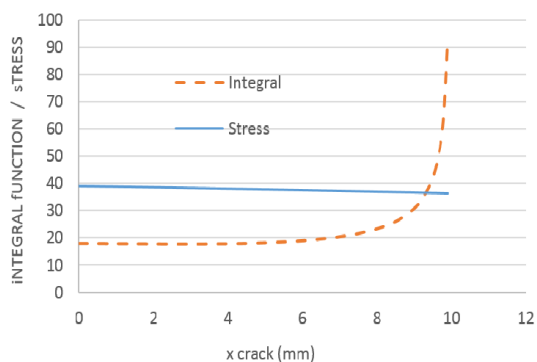
شکل ۱- ترک کناری با بار گذاری گسترده در لبه های ورق [۳]



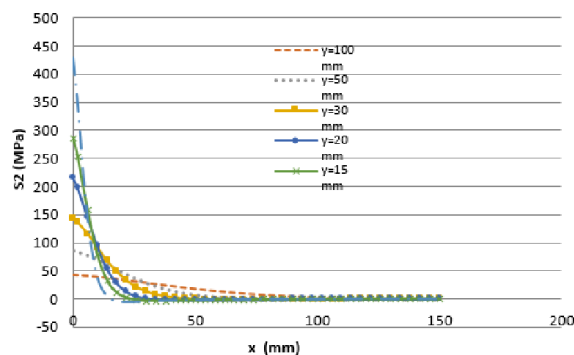
شکل ۵- پارامترهای مسئله توزیع تنش در ورق نیمه محدود گوه ای شکل [۵].



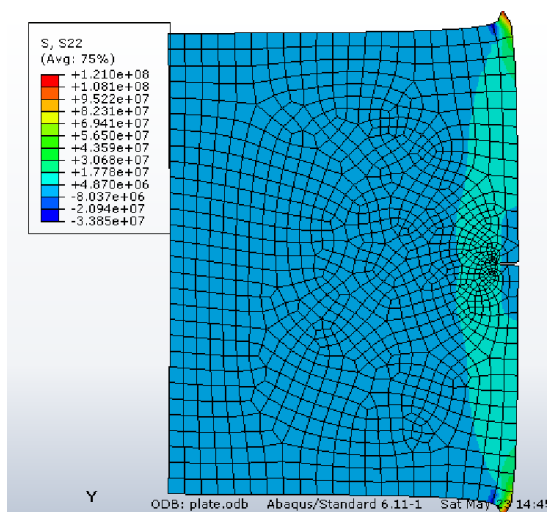
شکل ۴- توزیع تنش بر روی ترک لبه ای و مفهوم انتگرال گیری در آن



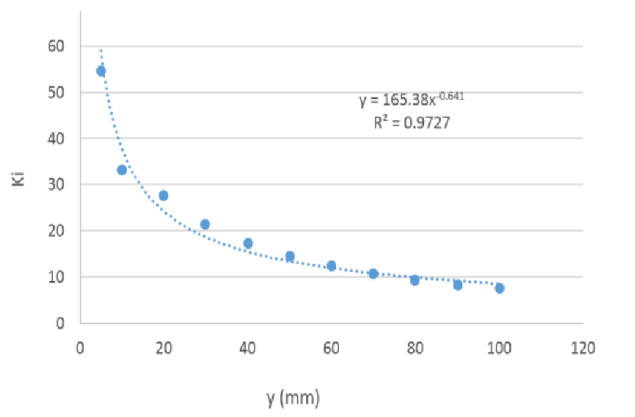
شکل ۷- توزیع تنش در مقطع طولی در فاصله های مختلف از لبه بار گذاری شده در ورق حاصل از معادله استخراجی



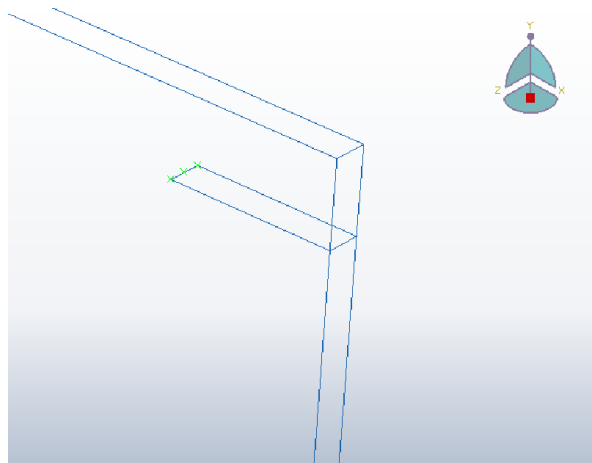
شکل ۶- توزیع تنش در مقطع طولی در فاصله های مختلف از لبه بار گذاری شده در ورق حاصل از معادله استخراجی



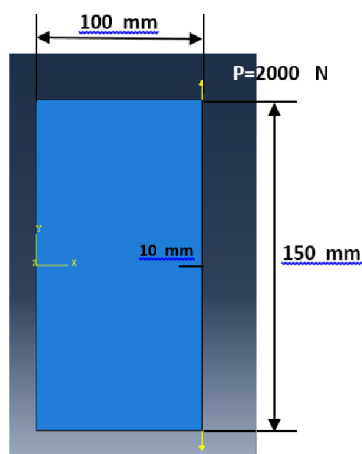
شکل ۹- توزیع تنش طولی به دست آمده از شبیه سازی مرحله اول



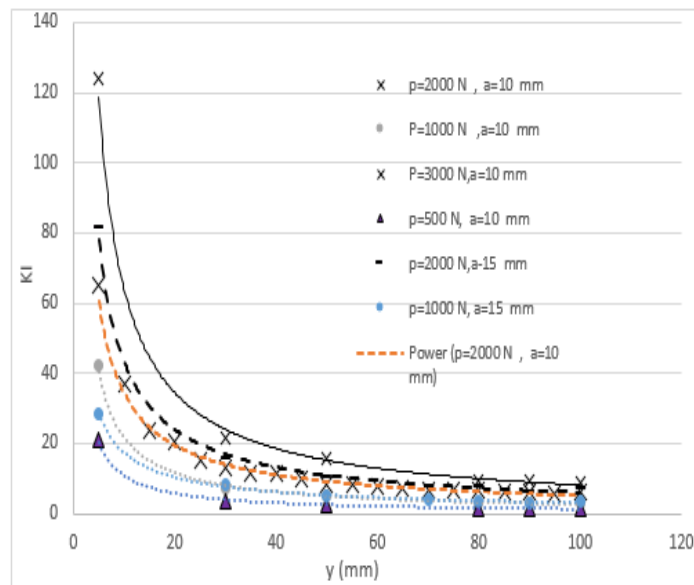
شکل ۸- تغییرات مقدار ضریب شدت تنش با فاصله ترک از لبه بار گذاری شده برای ترک در شرایط ذکر شده



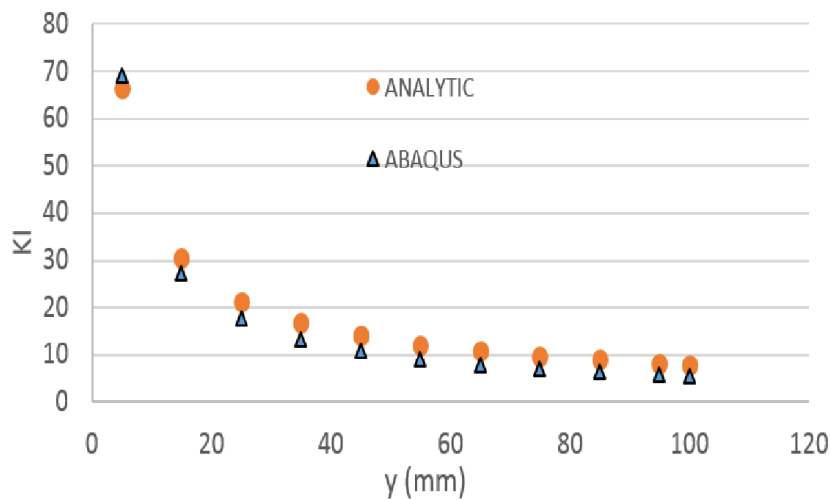
شکل ۱۱- روش ایجاد ترک در فاصله ۵ میلیمتری لبه



شکل ۱۰- مشخصات ورق شبیه سازی شده در مرحله اول



شکل ۱۲- تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله از لبه بار گذاری ده برای حالت های مختلف شبیه سازی



شکل ۱۳- روند تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله از لبه بار گذاری شده حاصل از دو روش مورد بررسی

۸- مراجع

- [1] A.A. Griffith (1921), "The phenomena of Ruture and flow in solid", Phil Trans. Royal Soc.,221 163-167.
- [2] C.E., Inglis(1913), "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", Transactions of the institute of Naval-Architects, 55, pp.219-241
- [3] G.R. Irwin 1948,"Fracture Dynamics", fracture of metals, American society for metals, Cleveland, , pp.147-166.

- [4] E. Orowan (1948), "Fracture of solids", reports on progress in physics, Vol.XII. 185-232.
- [5] N.F. Mott (1948), "Fracture of metals: Theoretical considerations." Engineering, Vol 165, 16-18[14] G.R. Irwin (1956), "Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys" sagamore research conference proceeding, vol 2,289-305.
- [6] G.R. Irwin (1956), "Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys" sagamore research conference proceeding, vol 2,289-305.
- [7] H.M. Westergaard (1939), " Bearing pressures and cracks" journal of applied mechanics, vol 6,49-53.
- [8] G.R. Irwin 1948,"Fracture Dynamics", fracture of metals, American society for metals, Cleveland, , pp.147-166.
- [9] M.L. Williams (1957), "On the stress distribution at the base of a stationary crack" journal of applied mechanics, vol. 24, 109-114.
- [10] A.A. Wells (1955), " The condition of fast fracture in aluminul alloys wiyh particular reference to comet failures" British welding research association report, April 1955.
- [11] D.H. Winne and B.M. Wundt (1958)," Application of the Griffith-Irwin theory of crack propagation to the bursting behavior of disks, including analytical and experimental studies." Transactions of the American society of mechanical engineers, vol. 80, 1643-1655.
- [12] P.C. Paris (1961), A rational analytic theory of fatigue", The trend in engineering, vol. 13, 9-14.
- [13] T.L. Anderson (1994). Fracture Mechanics, Texas University, Mechanical Engineering department, Texas, CRC Press.
- [14] N. Perez (2004). Fracture Mechanic, Department of Mechanical Engineering University of Puerto Rico, Kluwer Academic Publishers.
- [15] H.R. Sadd (2005). Elasticity, Department of Mechanical Engineering, Rhode Island, Kingstone.
- [16] E.E. Gdoutos(2006). Fracture Mechanics. Democritus University of Thrace, Xanthi, Greece

[۱۷] قاجار، رحمت الله (۱۳۸۱). مقدمه ای بر مکانیک شکست. تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

[۱۸] فرهی، غلامحسین (۱۳۷۶). مکانیک شکست. همدان، انتشارات دانشگاه بوعلی سینای همدان